CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ
"LAURENŢIU PANAITOPOL"
Tulcea. 21 Aprilie 2018

Clasa a 9-a

(1) Să se găsească cel mai mare element al mulţimii $\{\sin 1, \sin 2, \sin 3\}$.

(2) (a) Să se arate că $\left|x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$ pentru orice $x \in [0, 2]$.
(b) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funcţia definită prin $f(x) = x^2 + ax + b$. Să se arate că cel puţin una dintre inegalităţile $f(0) - f(1) \geq 1$ şi $f(2) - f(1) \geq 1$ este adevărată.
(c) Să se găsească cea mai mică valoare a lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât există numerele $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care inegalitatea $|x^2 + ax + b| \leq m$ este satisfăcută pentru orice $x \in [0, 2]$.

(3) Fie $a \in \mathbb{Z}$ un număr impar negativ fixat şi $(x_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $x_1 = a$ şi raţia $r \in \mathbb{Z}^*$. Definim mulţimea $M = \{n \in \mathbb{N}^* \mid |x_n - n| = 1\}$. Găsiţi toate valorile lui r pentru care mulţimea M are exact două elemente.

(4) Fie l şi m două drepte distincte concurente şi fie $M = \{\overrightarrow{v_i} \mid i = \overline{1, 2018}\}$ o mulţime de 2018 vectori având direcţiile paralele cu una dintre cele două drepte. Presupunem că $|\overrightarrow{v_i}| \neq |\overrightarrow{v_j}|$ pentru orice $i \neq j$. Dacă $|\overrightarrow{v_i}| \in \{1, 2, \ldots, 2018\}$, pentru orice $i = \overline{1, 2018}$, să se decidă dacă suma $\sum\limits_{i=1}^{2018} \overrightarrow{v_i}$ poate fi egală cu $\overrightarrow{0}$.