Concursul de Matematică “Laurenţiu Panaitopol”
Tulcea, 21 Aprilie 2018

Enunţuri, Clasa a XII-a

Problema 1. Câte dintre sistemele cu coeficienţi $a, b \in \mathbb{Z}_{12}$ de forma

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= \hat{1} \\ bx + ay + bz &= \hat{2} \\ bx + by + az &= \hat{3} \end{aligned}$$

au soluţii unice?

Problema 2. Demonstraţi cî pricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$ polinomul $f = (X-a)^2(X-b)^2 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

Problema 3. Fie $f : [0,1] \to R$ o funcţie continuă pe $[0,1]$. Să se arate că există un punct $c \in (0,1)$ astfel încât să avem

$$(c^2 - 3c + 1)\int\limits_0^c f(x)\mathrm{d}x = c(c-1)f(c)$$

Problema 4. . Fie $\mathcal{F}$ clasa funcţiilor continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, astfel încât $\int_0^1 f(x)(1-x)\,\mathrm{d}x \geq 1$. Asociem fiecărei funcţii f din $\mathcal{F}$ funcţia continuă $\bar{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, & 0 < x \leq 1 \\ \\ f(0), & x = 0. \end{cases}$$

Determinaţi valoarea minimă pe care o poate lua $\max_{0 \leq x \leq 1} \bar{f}(x)$, când f parcurge clasa $\mathcal{F}$.