Concursul de matematică ,,Laurenţiu Panaitopol"
Tulcea, 21 aprilie 2018

Clasa a 10-a

1. Rezolvaţi ecuaţia $\log_2(\log_2(1+\cos 4x)) + 2\sin x \sin 5x = 2^{2^{1+\cos 6x}}$.

Soluţie. Membrul stâng este cel mult $\log_2(\log_2 2) + 2 = 2$, iar membrul drept este cel puţin $2^{2^0} = 2$ **2p**

Egalitatea se obţine pentru $\cos 4x = 1$, $\sin x \sin 5x = 1$ şi $\cos 6x = -1$ **2p**

Cum $2\sin x \sin 5x = \cos 4x - \cos 6x$, soluţiile ecuaţiei sunt soluţiile comune ale ecuaţiilor $\cos 4x = 1$, $\cos 6x = -1$, adică $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **3p**

2. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea $e^{x+y} \leqslant f(x)f(y) \leqslant f(x+y)$, oricare ar fi numerele reale x şi y.

Soluţie. Pentru $x = y = 0$ obţinem $1 \leqslant f^2(0) \leqslant f(0)$, deci $f(0) = 1$ **2p**

Deducem $e^x \leqslant f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (1) **2p**

Apoi $f(x)f(-x) \leqslant f(0) = 1$ implică $f(x) \leqslant 1/f(-x) \leqslant 1/e^{-x} = e^x$. Combinând cu (1) obţinem $f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ **3p**

3. Fie a, b numere complexe, astfel încât $|z^2 + az + b| \leq 1$, oricare ar fi numărul complex z cu $|z| \leq 1$. Arătaţi că $a = b = 0$.

Soluţie. Pentru $z = \pm i$ avem $|b - 1 \pm ai| \leq 1$, deci $2 \geq |b-1+ai| + |b-1-ai| \geq |b-1+ai+b-1-ai| = 2|b-1|$, de unde $|b-1| \leq 1$ **2p**

Pentru $z = \pm 1$ avem $|b + 1 \pm a| \leq 1$, de unde, ca mai sus, $|b+1| \leq 1$ **1p**

Rezultă că b se află în intersecţia discurilor de rază 1, cu centrele în punctele de afixe ± 1, deci $b = 0$ **2p**

Obţinem acum $|1 \pm a| \leq 1$, de unde $a = 0$ **2p**

4. Fie A o mulţime nevidă de numere reale şi $f : A \to A$ o funcţie bijectivă, astfel încât funcţia $g : A \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + f(x)$ este strict crescătoare.

a) Demonstraţi că, dacă mulţimea A este finită, atunci f este funcţia identică.

b) Daţi exemplu de mulţime A şi funcţie care îndeplineşte condiţiile din ipoteză, dar $f(x) \neq x$, oricare ar fi $x \in A$.

Soluţie. a) Raţionăm inductiv, după numărul n al elementelor lui A. Dacă $n = 1$ atunci $A = \{a\}$ şi $f(a) = a$, deci $f = 1_A$ **1p**

Fie acum $n \geq 2$ şi $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ elementele lui A. Dacă $f(x_n) \neq x_n$, atunci există p, $1 \leq p < n$, astfel încât $f(x_p) = x_n$. Deducem $f(x_k) > x_p + f(x_p) - x_k = x_p + x_n - x_k \geq x_p$ pentru $k > p$. Reiese că mulţimea $\{x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{n-1}\}$ conţine cele $n - p$ elemente distincte $f(x_{p+1}), f(x_{p+2}), \ldots, f(x_n)$ – fals, deoarece mulţimea are $n - p - 1$ elemente. Aşadar presupunerea $f(x_n) \neq x_n$ este falsă, deci $f(x_n) = x_n$. Aplicând acum ipoteza de inducţie pentru funcţia f restricţionată la mulţimea $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$, deducem $f = 1_A$ **4p**

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ **2p**