

CONSECINȚE ALE INEGALITĂȚII LUI HÖLDER

de Laurențiu Panaitopol

Această notă este inspirată de un consistent articol ([1]) publicat recent de *Titu Andreescu și Mircea Lascu* în această revistă.

Autorii demonstrează că pentru $a_i > 0$ și $\alpha_i \geq 0$, $i \in \overline{1, n}$, avem:

$$\frac{a_1^2}{\alpha_1} + \frac{a_2^2}{\alpha_2} + \dots + \frac{a_n^2}{\alpha_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}. \quad (1)$$

Ca aplicații imediate ale acestei inegalități sunt rezolvate nu mai puțin de opt probleme apărute în *Gazeta Matematică*.

Una dintre aceste probleme a fost propusă în 1995 participanților la O.I.M. și are următorul enunț:

Fie a, b, c numere reale pozitive, astfel încât $abc = 1$. Să se arate că:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}. \quad (2)$$

Pentru rezolvare se notează $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$ și rezultă imediat $x, y, z > 0$ și $xyz = 1$. Inegalitatea de demonstrat devine:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}, \quad (3)$$

iar demonstrația să rezultă din iegalitatea (1) și inegalitatea $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$. Observând că inegalitatea (1) se poate obține folosind inegali-

tatea *Cauchy-Buniakovski*, vom generaliza (1) în aşa fel încât noua inegalitate să rezulte din următoarea inegalitate a lui *Hölder*:

Pentru $p > 1$ și $q > 0$, astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ și pentru $x_i, y_i \geq 0$, $i \in \overline{1, n}$, avem:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (4)$$

Vom arăta următorul rezultat:

Lema 1. Dacă $p \geq 1$ și $a_i \geq 0$, $b_i > 0$ pentru $i \in \overline{1, n}$, atunci:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^p}{b_i^{p-1}} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^p}{\left(\sum_{i=1}^n b_i \right)^{p-1}}. \quad (5)$$

Demonstratie. Pentru $p = 1$ inegalitatea se verifică. Pentru $p > 1$, alegem q astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. În (4) înlocuim $x_i = \frac{a_i}{b_i^{1/q}}$ și $y_i = b_i^{1/q}$ și avem:

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^p}{b_i^{p/q}} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^n a_i.$$

Ridicând la puterea p și ținând seama că $\frac{p}{q} = p - 1$, obținem enunțul.

Se observă ușor că pentru $p = 2$ se obține inegalitatea (1).

Cu acest rezultat obținem pentru (2) rezultatul mai general:

Dacă $a, b, c > 0$, $abc = 1$ și $\alpha \geq 0$, atunci:

$$\frac{1}{a^{2\alpha+1}(b+c)^\alpha} + \frac{1}{b^{2\alpha+1}(a+c)^\alpha} + \frac{1}{c^{2\alpha+1}(a+b)^\alpha} \geq \frac{3}{2^\alpha}. \quad (6)$$

Soluție. Notând $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$, obținem $xyz = 1$.

Ținând seama de aceasta, inegalitatea de demonstrat devine:

$$E = \frac{x^{\alpha+1}}{(y+z)^\alpha} + \frac{y^{\alpha+1}}{(x+z)^\alpha} + \frac{z^{\alpha+1}}{(x+y)^\alpha} \geq \frac{3}{2^\alpha}.$$

Folosind (5) pentru $n = 3$ și $p = \alpha + 1$ avem:

$$E \geq \frac{(x+y+z)^{\alpha+1}}{(x+y+y+z+z+x)^\alpha} = \frac{x+y+z}{2^\alpha}.$$

Cum $x+y+z \geq 3$, rezultă $E \geq \frac{3}{2^\alpha}$.

Pentru $\alpha = 1$ obținem inegalitatea (2).

Propunem cititorilor ca, folosind inegalitatea (5) în locul inegalității (1), să obțină generalizări pentru inegalitățile demonstreate în [1].

Observație. Pentru $p < 1$, $p \neq 0$ și $x_i, y_i > 0$, $i \in \overline{1, n}$, în (4) se schimbă sensul inegalității și de aici se obține:

Lema 2. Dacă $0 \leq p \leq 1$ și $a_i > 0$, $b_i > 0$ pentru $i \in \overline{1, n}$, atunci:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^p}{b_i^{p-1}} \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^p}{\left(\sum_{i=1}^n b_i \right)^{p-1}}. \quad (7)$$

Pentru $p < 0$ se obține inegalitatea (5).

Desigur, și din această inegalitate se pot obține cazuri particulare interesante.

Bibliografie

- [1] T.Andreescu, M.Lascu, *Asupra unei inegalități*, Gazeta Matematică, CVI, nr. 9-10 (2001), p. 321-326.

Prof.univ.dr.
Facultatea de Matematică,
Universitatea București