

# ASUPRA UNEI INEGALITĂȚI GEOMETRICE

de Laurențiu Panaitopol, asistent univ., București

În numărul 11/1980 al G. M., dr. Viorel Vodă atrage atenția asupra unei probleme elementare, a cărei rezolvare în varianta a doi matematicieni nigerieni, G. S. Lessels și M. Y. Pelling, a făcut necesară intervenția calculatorului, solicitat nu mai puțin de 10,65 ore. Este vorba de inegalitatea :

$i_a + i_b + m_c \leq p\sqrt{3}$  unde  $i_a, i_b$  sunt lungimi de bisectoare,  $m_c$  este lungimea unei mediane iar  $p$  este semiperimetru unui triunghi  $ABC$ .

Soluția prezentată de autorii menționați în revista iugoslavă „Publicacije Electrotehnikog Faculteta” presupune cunoștințe legate de aflarea extremelor funcțiilor de mai multe variabile, adică depășește cadrul matematicii elementare.

Vom da în continuare o soluție accesibilă majorității cititorilor G. M.

Fără a particulariza, vom considera  $p = 1$ . Notind  $p - a = x$ ;  $p - b = y$  rezultă :  $a = 1 - x$ ;  $b = 1 - y$ ;  $c = x + y$ ;  $x, y, x + y \in (0, 1)$ , unde  $a, b, c$  sunt lungimile laturilor.

Deoarece  $i_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bc(p-a)}$  și  $m_c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$ , inegalitatea de demon-

strat devine:

$$f(x, y) = \frac{2}{1+x} \sqrt{x(1-y)(x+y)} + \frac{2}{1+y} \sqrt{y(1-x)(x+y)} + \sqrt{1-x-y + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2} \leqslant \sqrt{3}.$$

Se observă cu ușurință că pentru  $x = y = \frac{1}{3}$ , adică pentru triunghiul echilateral, se realizează egalitatea.

Din inegalitatea mediilor aritmetice și geometrice rezultă:

$$2\sqrt{(1-y)(x+y)} \leq 1+x \text{ și } 2\sqrt{(1-x)(x+y)} \leq 1+y.$$

Așadar

$$f(x, y) \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{1-x-y + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2}.$$

Este suficient să arătăm că :

$$g(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{1 - x - y + \left(\frac{x - y}{2}\right)^2} \leq \sqrt{3}.$$

Folosim inegalitatea  $u + v \leq \sqrt{2(u^2 + v^2)}$ ,  $u, v \in \mathbf{R}$  și obținem:

$$\sqrt{y} + \sqrt{1 - x - y + \left(\frac{x - y}{2}\right)^2} \leq \sqrt{2 \left[ y + 1 - x - y + \left(\frac{x - y}{2}\right)^2 \right]} = \sqrt{2 - 2x + \frac{(x - y)^2}{2}}$$

adică :

$$g(x, y) \leq \sqrt{x} + \sqrt{2 - 2x + \frac{(x - y)^2}{2}}.$$

Dacă  $\sqrt{x} + \sqrt{2 - 2x + \frac{(x-y)^2}{2}} \leq \sqrt{3}$  demonstrația este încheiată.

Aveam echivalențele:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{2 - 2x + \frac{(x-y)^2}{2}} \leq \sqrt{3} &\Leftrightarrow \sqrt{2 - 2x + \frac{(x-y)^2}{2}} \leq \sqrt{3} - \sqrt{x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 - 2x + \frac{(x-y)^2}{2} \leq 3 - x - 2\sqrt{3x} \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{2} \leq 1 + 3x - 2\sqrt{3x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{2} \leq (\sqrt{3x} - 1)^2 \Leftrightarrow \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \leq |\sqrt{3x} - 1|. \end{aligned}$$

Așadar problema este rezolvată pentru  $|\sqrt{3x} - 1| \geq \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$ .

Analog se arată că inegalitatea din enunț este adevărată pentru  $|\sqrt{3y} - 1| \geq \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$ .

Rămîne de studiat cazul în care avem  $|\sqrt{3x} - 1| < \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$  și  $|\sqrt{3y} - 1| < \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$ .

Vom arăta însă că în nici un triunghi nu pot avea loc simultan aceste inegalități.

Putem presupune  $x \geq y$  adică  $|x-y| = x-y$ . Inegalitățile precedente devin

$$|\sqrt{3x} - 1| < \frac{x-y}{\sqrt{2}} \quad (1) \quad \text{și} \quad |\sqrt{3y} - 1| < \frac{x-y}{\sqrt{2}} \quad (2).$$

Deosebim situațiile:

a)  $x, y \geq \frac{1}{3}$ . Inegalitatea (1) devine succesiv

$$\sqrt{3x} - 1 < \frac{x-y}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x - \sqrt{6x} + \sqrt{2} > y \quad (3)$$

Funcția  $h : (0, 1)$ ,  $h(u) = u^2 - u\sqrt{6} + \sqrt{2}$  este strict descrescătoare și cum  $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$  rezultă  $h(\sqrt{x}) \leq h(\sqrt{y})$  adică  $x - \sqrt{6x} + \sqrt{2} \leq y - \sqrt{6y} + \sqrt{2} = y + \sqrt{2}(1 - \sqrt{3y}) \leq y$  ceea ce contrazice inegalitatea (3).

b)  $x, y \leq \frac{1}{3}$ . Inegalitatea (2) devine succesiv :

$$1 - \sqrt{3y} \leq \frac{x - y}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow y - \sqrt{6y} + \sqrt{2} \leq x \quad (4).$$

Dar din  $\sqrt{y} \leq \sqrt{x}$  deducem  $h(\sqrt{y}) \geq h(\sqrt{x}) = x - \sqrt{6x} + \sqrt{2} = x + \sqrt{2}(1 - \sqrt{3x}) \geq x$  ceea ce contrazice inegalitatea (4).

c)  $y \leq \frac{1}{3} \leq x$ . Inegalitățile (1) și (2) devin

$$\sqrt{3x} - 1 \leq \frac{x - y}{\sqrt{2}} \quad (5) \text{ și } 1 - \sqrt{3y} \leq \frac{x - y}{\sqrt{2}} \quad (6).$$

Pentru  $x = y$  inegalitățile (5) și (6) sunt false. Presupunem acum  $x > y$ . Însumind inegalitățile (5) și (6) obținem :

Pentru  $x = y$  inegalitățile (5) și (6) sunt false. Presupunem acum  $x > y$ . Însumând inegalitățile (5) și (6) obținem :

$$\sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) < \sqrt{2}(x - y) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} < \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Pentru  $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{\frac{3}{2}}$  se obține deci o contradicție.

Pentru  $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{\frac{3}{2}}$  rezultă  $\sqrt{y} > \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{x} \Leftrightarrow y > \frac{3}{2} - \sqrt{6x} + x$  și

deci  $y > x - \sqrt{6x} + \sqrt{2}$ . Cum inegalitatea (5) se mai scrie  $y < x - \sqrt{6x} + \sqrt{2}$ , s-a ajuns din nou la o contradicție, și problema este deci rezolvată.

*Observație.* Faptul că inegalitățile (1) și (2) nu pot avea loc simultan demonstrează că  $\max(|\sqrt{3}(p-a)-p|, |\sqrt{3}(p-b)-p|) \geq \frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ .