

Societatea de Științe Matematice din România, filiala București  
Colegiul Național „Spiru Haret”, București  
Centrul de Documentare și Informare „Laurențiu Panaitopol”  
Institutul de Matematică al Academiei Române

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ „LAURENȚIU PANAITOPOL”

Ediția a VIII-a, București, 14 noiembrie 2015

### SUBIECTELE

#### Clasa a X-a

1. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} xy + zt = -1 \\ xz + yt = -1 \\ xt + yz = -1 \end{cases} \quad x, y, z, t \in \mathbb{Z}$$

2. Fie  $\mathcal{P}$  mulțimea punctelor planului și  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție cu proprietatea: pentru orice triunghi  $ABC$  din plan, având centrul de greutate  $G$ , avem  $f(A) + f(B) + f(C) = 3f(G)$ .

a) Dați un exemplu de astfel de funcție care să nu fie constantă.

b) Arătați că dacă  $f$  este neconstantă, atunci mulțimea valorilor lui  $f$  este infinită.

3. În câteva cutii sunt puse, în total, un număr de  $2N$  pixuri:  $N$  pixuri roșii și  $N$  pixuri negre (unde  $N$  este un număr natural). Se știe că în fiecare cutie se află cel mult  $N$  pixuri.

Arătați că putem împărți pixurile la  $N$  persoane, astfel încât fiecare persoană să primească două pixuri de culori diferite, luate din cutii diferite.

4. Arătați că, dacă toate înălțimile unui triunghi sunt mai mari sau egale cu 1, atunci perimetrul triunghiului este cel puțin  $2\sqrt{3}$ .

*Timp de lucru: 3 ore*

*Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.*