

Societatea de Științe Matematice din România, filiala București
Colegiul Național „Spiru Haret”, București
Centrul de Documentare și Informare „Laurențiu Panaitopol”
Institutul de Matematică al Academiei Române

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „LAURENȚIU PANAITOPOL”

Ediția a VIII-a, București, 14 noiembrie 2015

SUBIECTELE

Clasele XI-XII

1. Rezolvați ecuația $\log_2(\log_2(1 + \cos 4x)) + 2 \sin x \sin 5x = 2^{2^{1+\cos 6x}}$.
2. Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este dat de $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ și

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+2}a_{n+1} + 7}{a_n}$$

pentru $n \geq 1$. Arătați că toți termenii șirului sunt numere întregi.

3. Demonstrați că funcția

$$f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}} + \sqrt{3} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}}$$

este strict monotonă.

4. Determinați funcțiile injective $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ care au proprietatea $2f(f(n)) \leq n + f(n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.