Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Filiala Bucureşti
Colegiul Naţional ,,Spiru Haret", Bucureşti
Centrul de Documentare şi Informare ,,Laurenţiu Panaitopol"
Institutul de Matematică al Academiei Române

Concursul naţional de matematică

"LAURENŢIU PANAITOPOL"

Ediţia a VIII-a, Bucureşti, 14.11.2015

Clasa a VIII-a

1. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ şi ecuaţia (*) $4x^4 + a^2 = 4x^2 a + 1$ cu necunoscuta $x \in \mathbb{R}$.
Determinaţi valorile lui *a* pentru care ecuaţia (*) are soluţie unică.

2. Se consideră numerele reale pozitive *x*, *y* şi *z*.
Demonstraţi că, dacă $x + y + z = 1$, atunci $\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64$.

3. Se consideră două numere naturale nenule *a* şi *b* care verifică egalitatea

$$a^2 - 4b^2 = b(8a+1) .$$

a) Arătaţi că *b* este pătrat perfect;
b) Daţi exemplu de o pereche de naturale nenule (a,b) care verifică egalitatea din enunţ.

4. Se consideră un semicerc ω de diametru $[AB]$ şi un cerc γ tangent segmentului $[AB]$ în punctul *C* şi tangent semicercului ω în punctul *T*. Fie $M \in \omega$, $N \in [CB]$ astfel încât $MN \perp AB$ şi dreapta *MN* este tangentă cercului γ. Arătaţi că semidreapta $(MC$ este bisectoarea unghiului AMN .

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7;
Timp de lucru: 3 ore efectiv.