Societatea de Ştiinţe Matematice din România, filiala Bucureşti
Colegiul Naţional „Spiru Haret”, Bucureşti
Centrul de Documentare şi Informare „Laurenţiu Panaitopol”
Institutul de Matematică al Academiei Române

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ,,LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a VIII-a, Bucureşti, 14 noiembrie 2015

SUBIECTELE

Clasa a IX-a

1. Se consideră ecuaţia $\{x\}[x] = x$.
a) Arătaţi că ecuaţia nu are soluţii strict pozitive.
b) Arătaţi că ecuaţia are o infinitate de soluţii.

2. Arătaţi că, dacă x, y, z sunt numere reale astfel încât $x \leq y \leq z$ şi $xy + xz + yz = 1$, atunci $xz < \frac{1}{2}$.

3. Două tetraedre se numesc *de acelaşi tip* dacă le putem nota cu $A_1A_2A_3A_4$ şi $B_1B_2B_3B_4$, astfel încât $A_iA_j = B_iB_j$ pentru orice $1 \leq i < j \leq 4$. Câte tipuri diferite de tetraedre au mulţimea lungimilor muchiilor $\{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$?

4. O mulţime M de 100 de puncte din plan are o parte dintre elemente colorate cu roşu şi celelalte elemente colorate cu verde. Se ştie că orice dreaptă care conţine cel puţin două elemente ale mulţimii conţine un număr egal de puncte din cele două culori. Arătaţi că toate punctele din M sunt coliniare.

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.