CONCURSUL NAŢIONAL ,,LAURENŢIU PANAITOPOL"
15 mai 2010, Tulcea

Soluţii – clasa a IX-a

1. Să se afle valorile parametrului real m pentru care ecuaţia $x^2 - 2mx + 2m^2 - 25 = 0$ are două soluţii întregi.

Soluţie. Dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, atunci $2m = x_1 + x_2 \in \mathbb{Z}$ şi $2m^2 = x_1x_2 + 25 \in \mathbb{Z}$, deci $m \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia se scrie $(x-m)^2 + m^2 = 25$; cum 25 se poate scrie ca sumă de pătrate $25 = 3^2 + 4^2 = 0^2 + 5^2$, rezultă răspunsul: $m \in \{0, 3, 4, 5\}$.

2. Să se determine funcţiile strict monotone $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care satisfac următoarele condiţii:
a) $f(2n) = n + f(n)$, oricare ar fi n natural.
b) $f(n)$ este pătrat perfect dacă şi numai dacă n este pătrat perfect.

Soluţie. $f(4) = 3 + f(1) \Rightarrow f(1) = 1, f(4) = 4$. Rezultă $f(2^n) = 2^n$. În plus, $f(0) = 0$. Din monotonie, $f(x) = x$.

3. Fie un triunghi ABC. Un cerc de rază variabilă ρ ce trece prin B şi C taie AB şi AC în E şi D. Fie ρ' raza cercului circumscris triunghiului ADE. Să se arate că există un triunghi cu laturile R, ρ, ρ' şi un unghi al acestui triunghi este constant.

Soluţie. Fie F, G, H centrele celor trei cercuri; arătăm că $FG = \rho'$ (deci triunghiul BFG are laturile de lungimi $BF = R, BG = \rho, FG = \rho'$, iar $\angle BFG = \frac{1}{2}\angle BFC = \angle BAC = \text{ct}$).

Cel puţin unul dintre unghiurile $\angle B, \angle C$ este ascuţit, de exemplu $\angle B$. Fie atunci F', G' proiecţiile punctelor F, G pe AB. Deducem că F' este mijlocul lui $[AB]$, G' este mijlocul lui $[BE]$, $FG = \frac{1}{\cos(90-B)}F'G' = \frac{1}{\sin B}F'G'$ şi

$$F'G' = BF' - BG' = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}AE = \rho' \sin \angle ADE = \rho' \sin B,$$

de unde reiese relaţia anunţată la început.

4. Pe laturile AB, BC, CD şi DA ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, P şi respectiv Q astfel încât

$$\frac{AM}{MB} = l, \ \frac{CN}{NB} = k, \ \frac{CP}{PD} = m, \ \frac{AQ}{QD} = p,$$

unde $l, k, m, p > 0$ şi

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}.$$

Să se arate că dreptele QN, PM şi AC sunt concurente.

Soluţie. Vom demonstra că dacă $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$ atunci $m = l$ şi $p = k$, relaţie din care va rezulta că patrulaterele $ANCQ, AMCP$ şi $QMNP$ sunt paralelograme, adică diagonalele acestora au mijlocul comun.

Au loc succesiv relaţiile:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{m+1}\overrightarrow{AC} + \frac{m}{m+1}\overrightarrow{AD}; \quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB};$$
$$\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{p+1}\overrightarrow{AC} + \frac{p}{p+1}\overrightarrow{CD} \quad \text{şi} \quad \overrightarrow{CM} = \frac{1}{l+1}\overrightarrow{CA} + \frac{l}{l+1}\overrightarrow{CB}.$$

Adunând aceste patru egalităţi şi ţinând seama că $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ obţinem:

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{CM} = \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{l+1}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{p+1}\right)\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m+1} - \frac{1}{l+1} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{p+1} = 0 \Rightarrow m = l \quad \text{şi} \quad k = p,$$

fapt ce încheie demonstraţia.